D問題

square1001の通学経路

問題概要

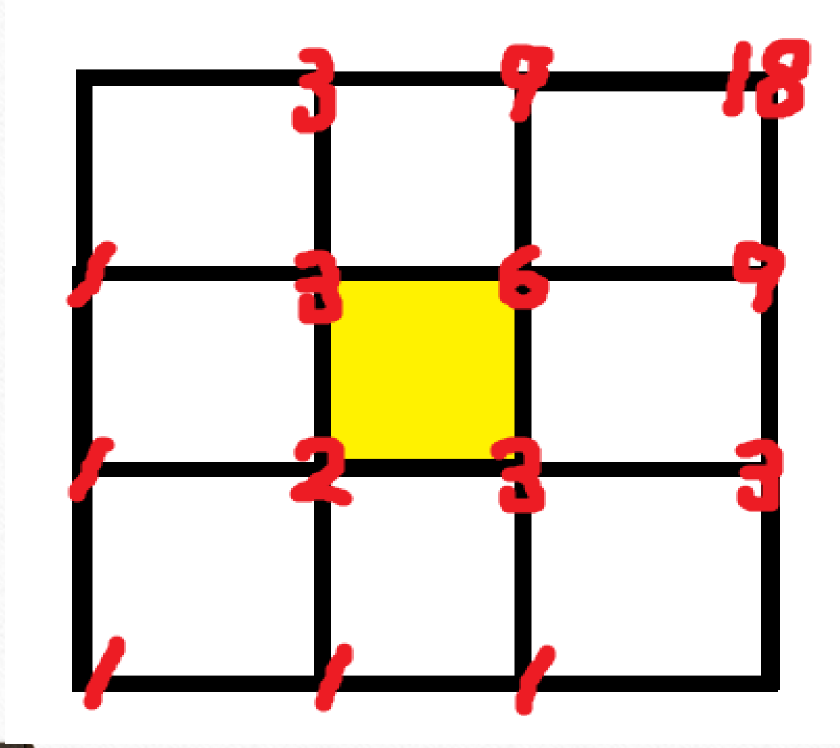
- square1001は、左下の交差点＝家(1,1)から右上の交差点＝学校(W,H)に行く。
- 彼は、右か上にしか進まない。
- 彼は、K個のマスに用があり、そのマスの周りを全ての用のあるマスに対して最低1回は通って用を済ませなければならない。
- そのような通学経路は何通り存在するか。
- 制約
- 1≦H,W≦1,000かつ1≦K≦200

例

- H=4,W=4,K=1で用があるマスの左下の交差点が(2,2)のとき、18通りの経路が考えられる。
- 用があるマスのことを考えなければ入力例の図のように20通りの経路が存在する。
- しかし、(1,1)→(1,2)→(1,3)→(1,4)→(2,4)→(3,4)→(4,4)という行き方と、(1,1)→(2,1)→(3,1)→(4,1)→(4,2)→(4,3)→(4,4)という行き方は、左下(2,2)右上(3,3)のマスの周りの交差点を通らないため、条件を満たす経路は18通りしか存在しない。

例に対応する図

(1,4)に行くためには
(1,1)→(1,2)→(1,3)→(1,4)という経路を通る必要があるため、そのマスに行くことはできません。(4,1)についても同じことが言えます。

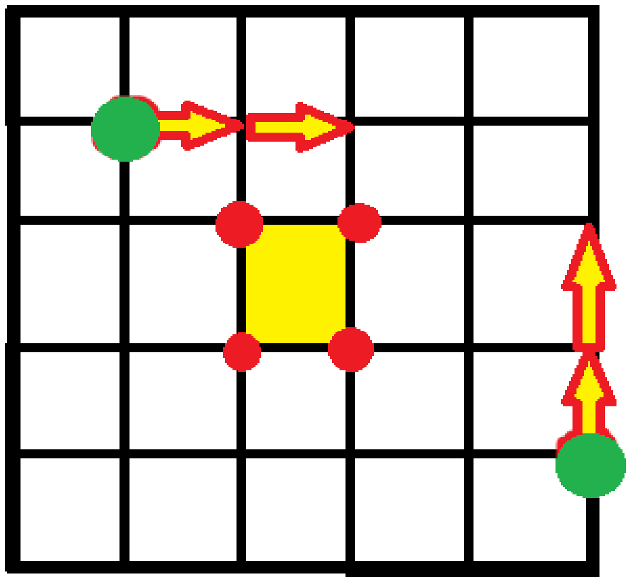


解法(貪欲法の部分)

- この問題は、貪欲法とDPの複合問題である。
- <貪欲の部分について>
- 用があるマスの左下の交差点が(X,Y)のとき、X座標がX+2以上かつY座標はY−1以下である交差点は通れない。
- また、X座標がX−1 以下かつY座標がY+2以上である交差点は通れない。
- これを全ての用のあるマスに対して通れるか通れないか判定し、すべて「通れる」と判定されるであるマスは通ることができ、そうでないマスは通ることができない。…①

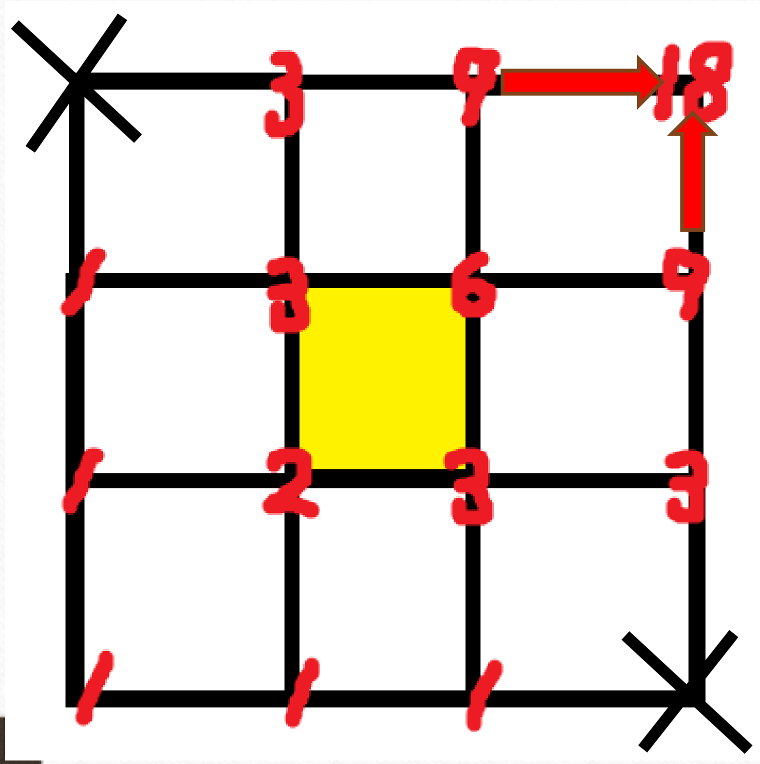
解法(貪欲法の部分)

- 緑の交差点(2,5)から移動するとしても、右か上にしか移動できないため、X座標,Y座標を減らすことはできない。→Y座標を4にしてこの交差点から黄色のマスの周りに行くことはできない。(6,2)についても同じようなことが言える。



解法(DPの部分)

- 5ページ目の①を利用して
交差点(i,j)は通れるかどうかを
記録しておき、dp(1,1)を1として
そのマスが通れるならばdp(i,j)=
dp(i-1,j)+dp(i,j-1)として、通れない
ならばdp(i,j)=0とする。
dp(W,H)が解となる。dp(i,j)の値は、
(1,1)から(i,j)まで経路の総数である。



時間を短くする方法

- このマスが通れるか通れないかを記録するのに最大でO(KHW)かかるので、最大の計算量は200*1000*1000=2億だから間に合う。
- しかし、実行速度の遅い一部の言語では間に合わない。

0 0 0 0 0 0		1 1 1 0 0 0	
0 0 0 0 0 0		1 1 1 0 0 0	
0 0 0 0 0 0	→	0 0 0 0 0 0	(マス(2,4)に用がある場合)
0 0 0 0 0 0		0 0 0 0 0 0	この場合、loop回数は7となる。
0 0 0 0 0 0		0 0 0 0 0 1	

時間を短くする方法

- いもす法という方法をつかう。
- 1にしたいマスの左下の交差点を(X1,Y1),右上の交差点を(X2,Y2)とするとき、
- (X1,Y1)に1を足し、(X2+1,Y1)に-1を足し、(X1,Y2+1)に-1を足し、(X2+1,Y2+1)に1を足す。
- 左から右方向への累積和を求め、その次下から上方向への累積和を求める。…②
- ②で0である場所は通れる。そうでない場所は通れない。

時間を短くする方法

- そうすれば、計算量はO(HW)となり、Rubyなどの言語でもTLEしない。
- 上の例では、次のようになる。

0 0 0 0 0 0		0 0 0 0 0 0		1 1 1 0 0 0
1 0 0 -1 0 0		1 1 1 0 0 0		1 1 1 0 0 0
0 0 0 0 0 0	→	0 0 0 0 0 0	→	0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 -1		0 0 0 0 0 -1		0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 1		0 0 0 0 0 1		0 0 0 0 0 1