H問題

3人の昼食

問題概要

- square1001,E869120,うさぎの3人がいる。
- 昼食がN個あり、i個目の値段はaiである。
- square1001の合計代金をA,E869120の合計代金をB,うさぎの合計代金をCとするとき、|A-B|と|A-C|が両方D以下でなければならない。
- 食品は取らないこともできる。ただし、E個以下まで。
- そのような分け方の総数は何通りあるか。

問題概要

- 制約
- 1≦N≦20,1≦ai,D≦1,000,000,000,0≦E≦2
- データセット1では、1≦N≦10を満たす。
- データセット2では、分け方の総数は1000通り以下である。
- データセット3では、分け方の総数に制約はない。32ビット型に収まらない場合もある。

例

- N=3,D=2,E=1,a={2,4,6}のとき
- 4通りの分け方が考えられる。
- {A,B,C}={4,6,2},{4,2,6},{2,0,4},{2,4,0}が考えられる。
- 最初の2つは何も残さないパターンである。
- 残りの2つは値段が6の食品を残すパターンである。
- A=square1001 の合計昼食代金、B=E869120の合計昼食代金、C=うさぎの合計昼食代金である。

例

	食品1(値段2)	食品2(値段4)	食品3(値段6)	A	B	C
パターン1	うさぎ	square1001	E869120	4	6	2
パターン2	E869120	square1001	うさぎ	4	2	6
パターン3	square1001	うさぎ	×	2	0	4
パターン4	square1001	E869120	×	2	4	0

部分点解法1(20点)

- 全探索する。
- i個目の食品を{square1001が食べる,E869120が食べる,うさぎが食べる,残す}の4通りに分けて探索。4^N通りを全て試す。
- そして、「残す」が選ばれた食品の数がE以下でありかつ「square1001」が選ばれた食品の代金の合計=P,「 E869120」が選ばれた食品の代金の合計=Q,「うさぎ」が選ばれた食品の代金の合計=Rとするとき、min(|P-Q|,|P-R|)=D以下である場合、sumに1を足す。
- sumの最終的な値が答えとなる。

部分点解法(20点)

- 4,5ページ目の例の場合、
- square1001=0,E869120=1,うさぎ=2,残す=3とするとき、
- {食品1,食品2,食品3}={0,0,0}のとき|A-B|=12→ダメ
- {0,1,2}のとき|A-C|=4→ダメ
- {0,3,3}のとき残す食品の数=2→ダメ
- {1,0,2}のときOK→sumに1を加算、というふうにして全探索するとsum=4となる。
- しかし、このままではN=20 のとき4^20=約1兆通りを全て試すことになってしまう。

部分点解法(70点)

- 半分全列挙する。
- 最初のN/2個と後ろのN/2個に分ける。
- 最初のN/2個を全探索したときのA-B,A-C,残す数の値はA_B1,A_C1,E1として記録しておく。
- 後ろのN/2個を全探索したときのA-B,A-C,残す数の値はA_B2,A_C2,E2として記録しておく。
- A_B2の昇順になるように後ろを全探索した時に記録された値をソートする。

部分点解法(70点)

- 前半全探索の要素のi番目→A_B1[i]=a,A_C1[i]=b,E[i]=cとする。
- a+(A_B2[i])>=-Dとなるものの中で最小のiを二分探索で求める。
- a+(A_B2[j])<=Dとなるものの中で最大のjを二分探索で求める。
- iからjまで探索する。何番目の要素を指しているかをkとすると、
- |b+A_C2[k]|<=Dかつc+E2[k]<=Eである場合sumに1を加算する。
- 例えば、N=2,D=2,E= 1,a={1,3}のとき、

部分点解法(70点)

- A_B1={1,-1,0,0}　A_B2={-3,0,0,3}
- A_C1={1,0,-1,0}　A_C2={0,-3,0,3}
- E1　={0,0,0,1}　E_2　={0,0,1,0}
- →前半が0番目のときi=0,j=2(k=0,1のときOK)
- 1番目のときi=1,j=3(k=2のときOK)
- 2番目のときi=1,j=2(k=2のときOK)
- 3番目のときi=1,j=2(OKであるものはない)よって、sum=4
- しかし、計算量は通り数以上かかってしまうため、(平均で通り数*3くらい)データセット2には通りますが、3には通りません。

満点解法

- 領域木というものを使います。
- 計算量は、点の数をnとするとO(nlog^2(n))であり、N≦20,E≦2のとき、半分全列挙を使えば点の数は最大でも約50万個となるため、計算量は約2億となります。
- 領域木を使うと、通り数に比例した計算量を必要としないので、点の数が100億通りあってもTLEしません。
- ちなみに、N≦20,E≦2のときの考えられる最大の通り数は12桁にもなります。

おわりに

- Square869120Contestのテスターを協力していただいたsnuke様,kyuridenamida様,gotoloop様、そしてこのコンテストに参加していただいた方々、本当に有難うございました。
- 問題は面白かったですか。難しかったですか。
- 問題作成者としては、H問題が一番難しいと思っています。
- いろいろと感想があると思いましたが、解説はこれにて終了です。
- ありがとうございました。

THE END

writer:square1001,E869120